AIR 1980

COMPOSITION DE MATHEMATIQUES T - TA

La composition comprend deux problèmes indépendants.

PROBLEME 1

Dans le plan orienté, on donne un axe polaire Ox, une longueur unité ; (θ, r) désignent un ensemble de coordonnées polaires d'un point quelconque du plan. Une famille de courbes Γ_n est définie par son équation polaire :

$$r = \left(\sin \frac{\theta}{n}\right)^n \qquad n \in \mathbb{N}^*$$

1°) Montrer qu'en faisant varier θ dans un intervalle d'amplitude $n\pi$ on décrit toute la courbe Γ_n.

2°) M(θ) étant un point de la courbe, MT la tangente en M, calculer tg (OM, MT) .

En déduire une construction simple de cette tangente en tout point M (sauf au point O).

3°) Construire Γ_n pour n = 2 ; n = 3 ; n = 4
(on prendra unité = 5cm)

4°) Trouver l'intégrale donnant la longueur totale d'une courbe Γ_n.

Calculer effectivement cette longueur pour n = 4 et n = 5.

5°) On oriente Γ_n dans le sens de θ croissant. Soit $\vec{t}$ le vecteur tangent unitaire de la courbe orientée en un point M(θ), $\vec{n}$ le vecteur normal unitaire :

$$(\vec{t}, \vec{n}) = \frac{\pi}{2} \quad [\text{Mod } 2\pi]$$

En se bornant à $\theta \in \left[0, n\frac{\pi}{2}\right]$, déterminer l'angle $(\vec{Ox}, \vec{t})$, le rayon de courbure R, $\vec{MC}$ (C étant le centre de courbure en M) .

T.S.V.P.

En déduire une représentation paramétrique de la développée de Γ_n, définie comme ensemble des centres de courbure C.

(on ne demande pas la construction de cette développée)

(on utilisera le repère cartésien (Ox, Oy) associé au repère polaire)

6°) En tout point M de Γ_n on mène la droite Δ_M perpendiculaire à OM en M.

(si M est en O, Δ_O est la perpendiculaire à la tangente)

Donner une représentation paramétrique de l'enveloppe de la famille de droites Δ_M, $M \in \Gamma_n$ (on ne demande pas sa construction dans le cas général).

Indiquer la nature géométrique de cette enveloppe pour n = 2.

PROBLEME 2

On donne les 2 matrices

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \qquad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

et la famille de matrices :

$$M(a, b) = a\,U + b\,I \qquad (a, b) \in \mathbb{R}^2$$

Le plan euclidien étant rapporté à une base orthonormée directe $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$, matrice M(a, b) définit pour cette base l'endomorphisme $\varphi(a, b)$.

1°) Montrer que la famille de matrices est stable pour la multiplication matricielle.

2°) Suivant (a, b) étudier le rang de M(a, b), l'image de $\varphi(a, b)$, le noyau (ou $\ker \varphi$).

3°) Montrer que tous les endomorphismes $\varphi(a, b)$ ont mêmes vecteurs propres si $a \neq 0$.

4°) Soit une autre base orthonormée directe $(\vec{\varepsilon}_1, \vec{\varepsilon}_2)$, $\vec{\varepsilon}_1$ étant un vecteur propre de $\varphi(a, b)$ $(a \neq 0)$.

Trouver la matrice de l'endomorphisme $\varphi(1,0)$ pour cette nouvelle base.

En déduire la matrice de $\varphi(a, b)$ dans cette nouvelle base.

5°) Quand l'endomorphisme $\varphi(a, b)$ n'est pas un isomorphisme, ni l'application zéro, montrer qu'on peut le définir comme un composé de transformations géométriques très simples.
Retrouver la plupart des résultats précédents.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail